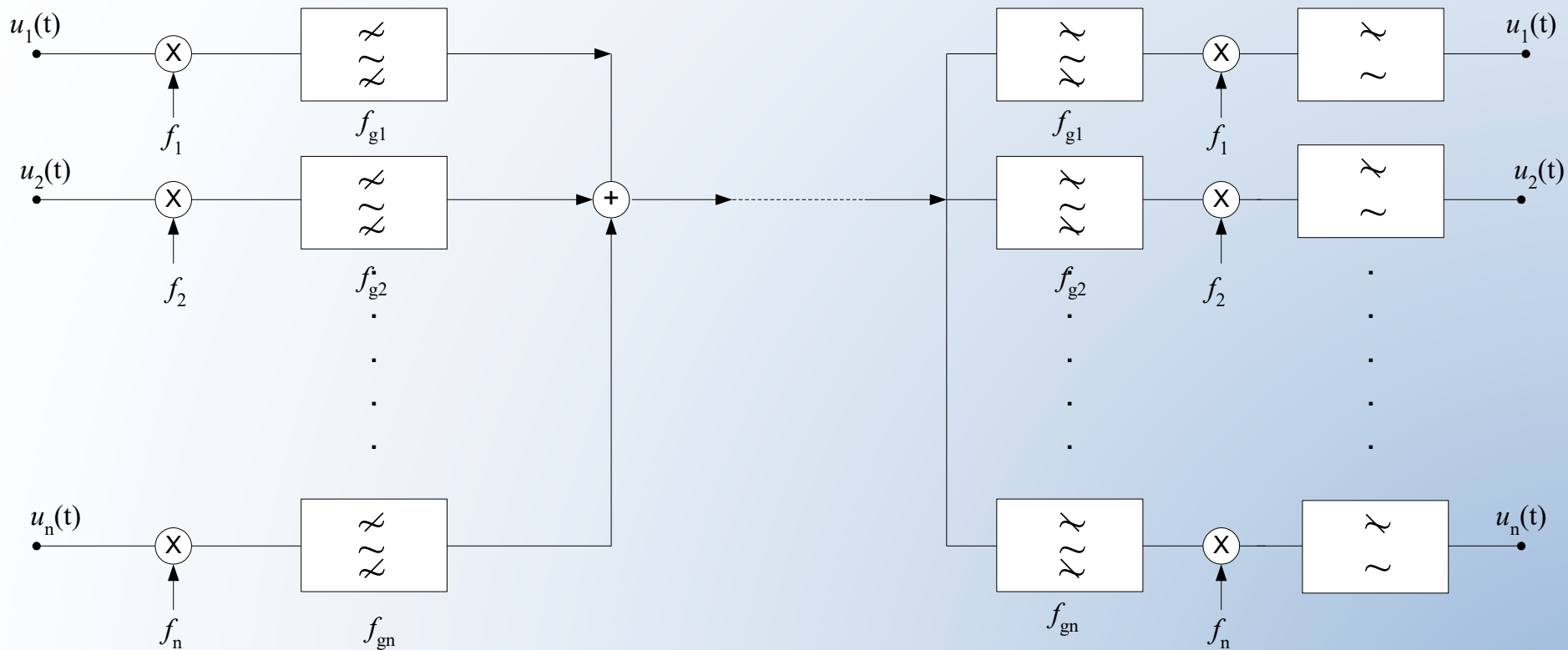


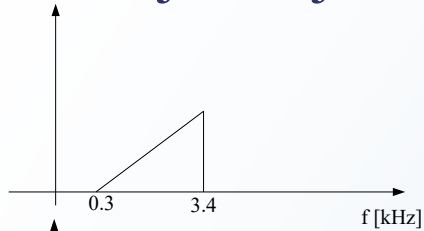
# PRENOS MULTIPLEKSNIH SIGNALA

Multipleks – sistem prenosa kojim se vrši istovremeni prenos više različitih poruka. Postoji više vrsta multipleksnog prenosa, jedan od njih je *multipleks sa frekvencijskom raspodjelom kanala*.

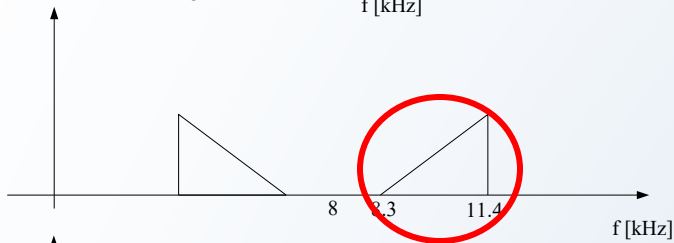


Slika: Principna šema multipleksa sa  $n$  kanala

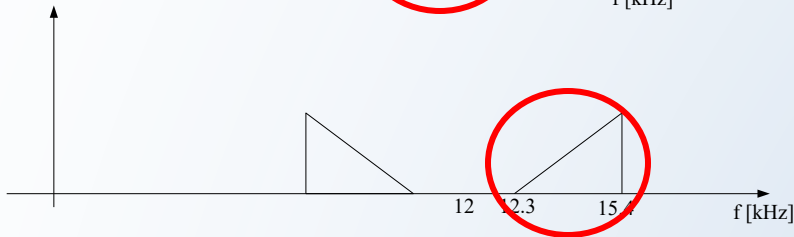
Na svaki od  $n$  kanala se dovodi signal koji se moduliše modulacijom tipa AM 1BO. Spektar svakog od ovih signala se translira u odgovarajući položaj, tako da na mjestu njihovog sabiranja ne dolazi do preklapanja spektara.



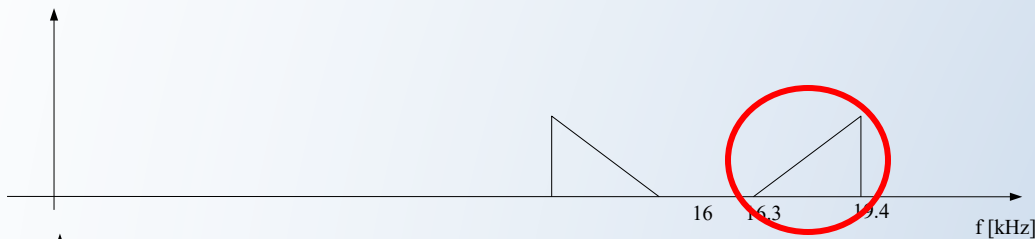
Signal  $u(t)$  u osnovnom opsegu ( $u(t)$ )



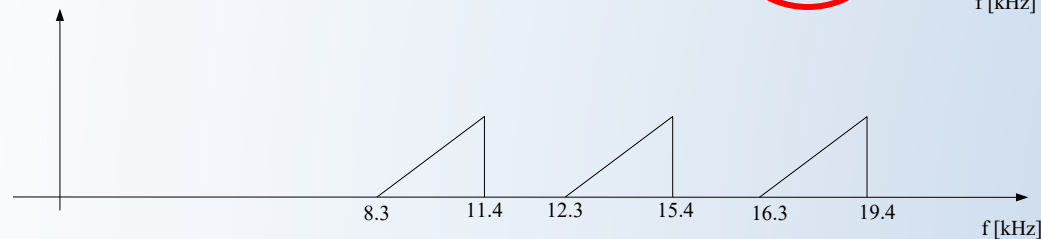
Signal  $u(t)$  transliran za  $f_1=8\text{kHz}$



Signal  $u(t)$  transliran za  $f_2=12\text{kHz}$



Signal  $u(t)$  transliran za  $f_3=16\text{kHz}$



Multipleksni signal

Postoje dva načina multipleksiranja:

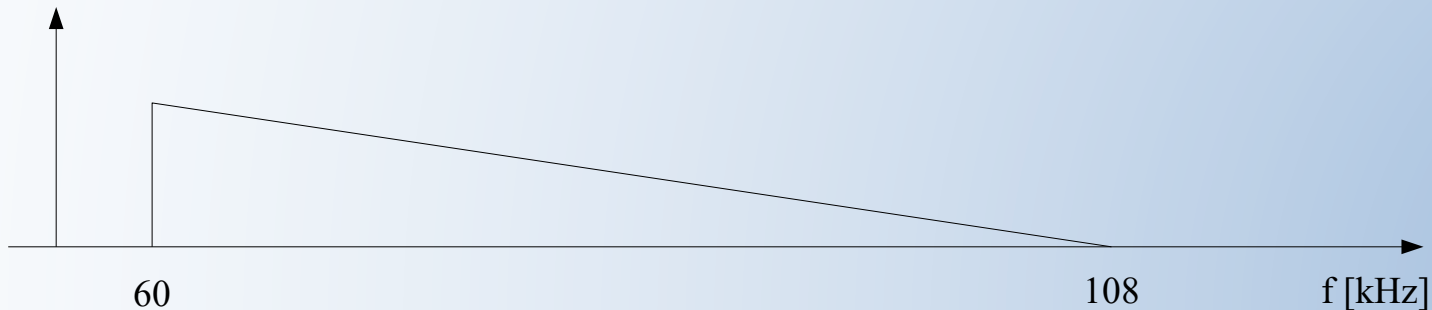
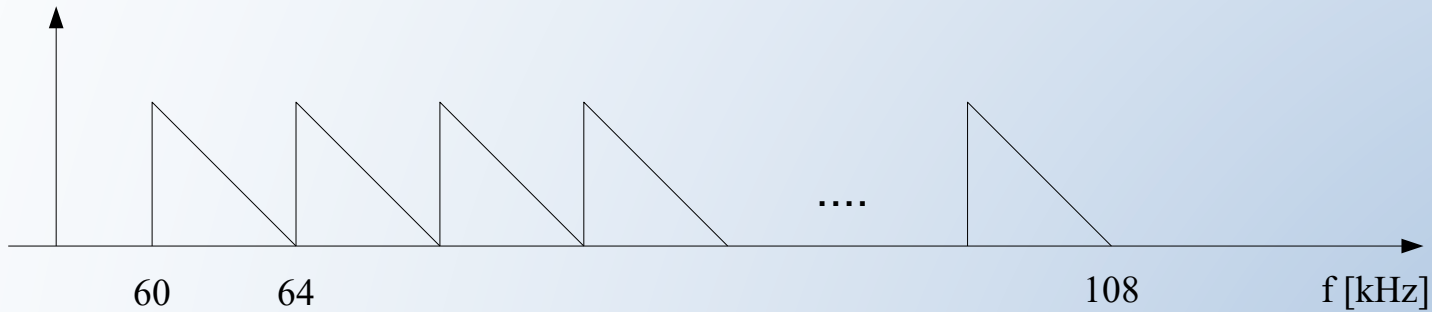
1. Direktna modulacija
2. Predgrupna modulacija

### 1. Direktna modulacija

Multipleks se sastoji od 12 kanala. Svaki kanal se posebno moduliše i za svaki je potreban poseban filter koji izdvaja donji bočni oseg, i nosilac na različitoj učestanosti. Učestanosti za koje se vrši translacija su:

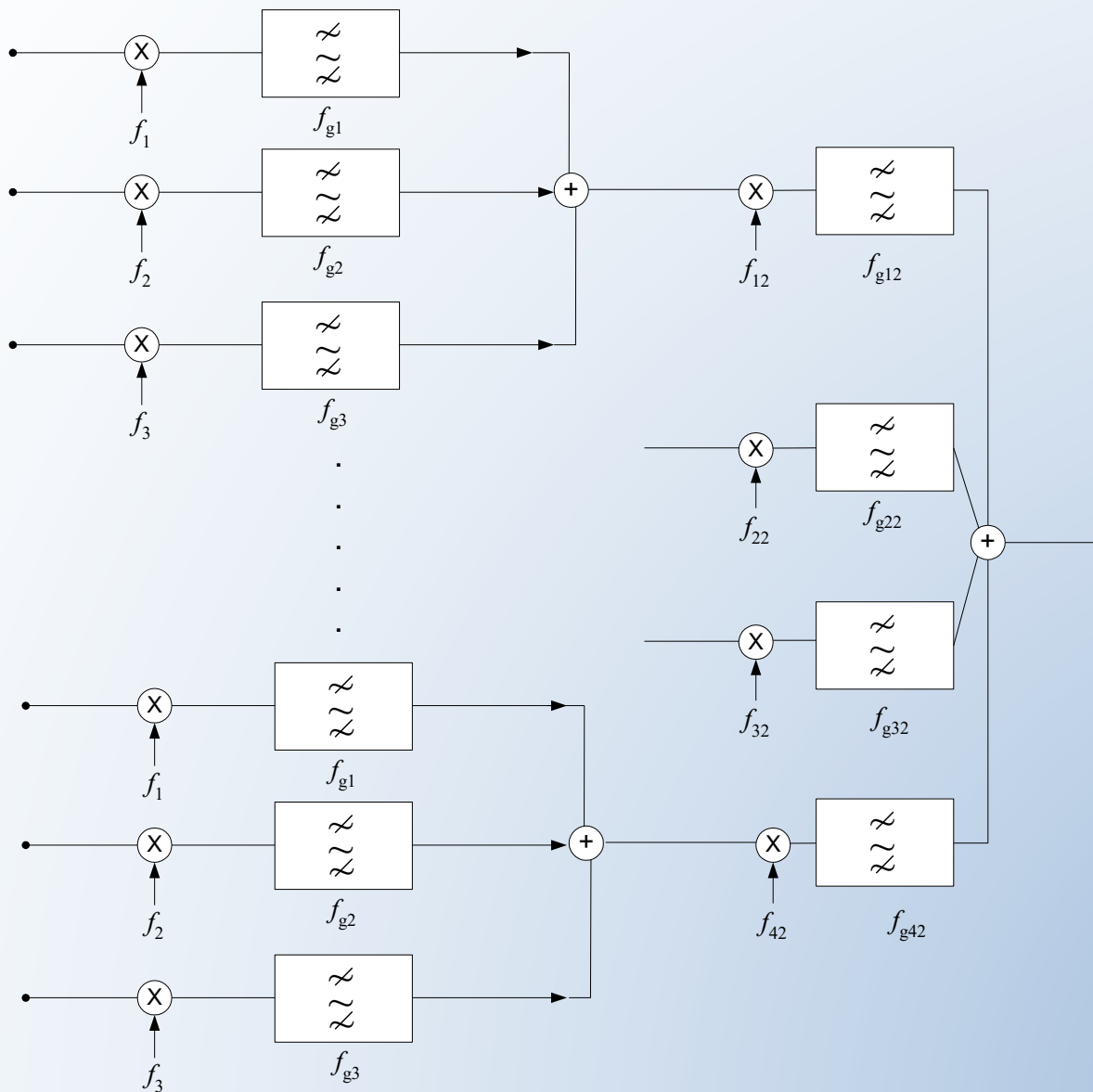
$$f_1=64\text{kHz}, \dots f_n=108\text{kHz}.$$

Riječ je o govornom (telefonskom) signalu, a nosioci su pomjereni za po 4kHz. Opseg koji zauzima ovakav multipleksni signal je  $f=(60, 108)$  kHz.



## 2. Predgrupna modulacija

Podrazumijeva modulisanje predgrupa.



Vrši se grupisanje po tri kanala, koji se modulišu kao jedna predgrupa. U drugom koraku imamo translacije ovih grupa na različite nosioce.

Sistem sa 12 kanala u ovom slučaju koristi 7 različitih nosilaca i 7 različitih filtara. Filtri vrše izdvajanje gornjeg ili donjeg bočnog opsega.

Učestanosti su:

$$f_1=12\text{kHz}, f_2=16\text{kHz}, f_3=20\text{kHz}$$

$$f_{12}=84\text{kHz}, f_{22}=96\text{kHz}, f_{32}=108\text{kHz}, f_{42}=120\text{kHz}$$

$$f_{g1}=(12.3-15.4)\text{kHz}, f_{g2}=(16.3-19.4)\text{kHz}, f_{g3}=(20.3-23.4)\text{kHz}$$

$$f_{g12}=(60-72)\text{kHz}, f_{g22}=(72-84)\text{kHz}, f_{g32}=(84-96)\text{kHz}, f_{g42}=(96-108)\text{kHz}$$

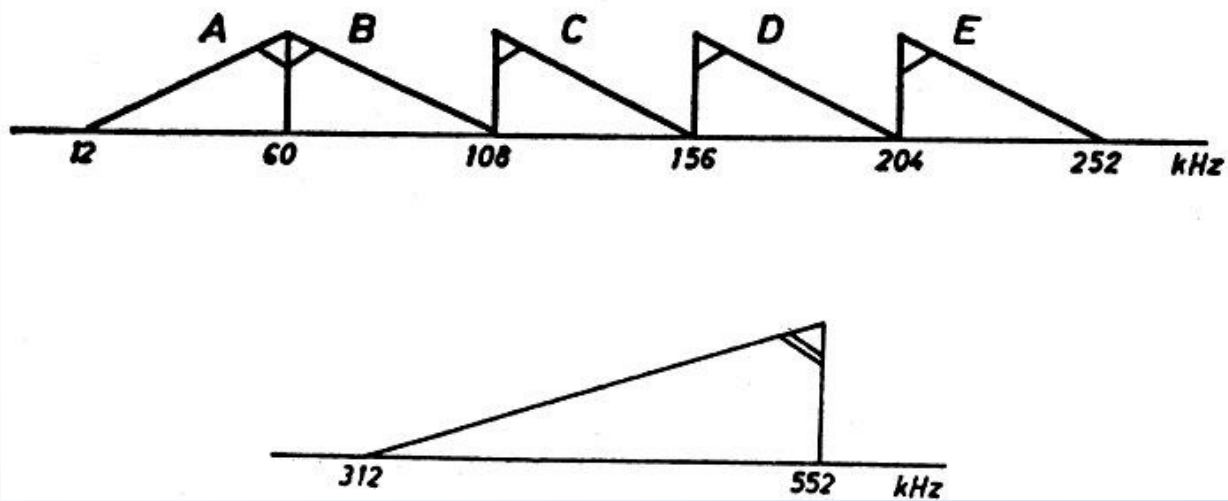
Jasno je da je i ovdje opseg izlaznog (multipleksnog) signala (60-108)kHz.

U analognoj telefoniji ovakav multipleksni signal se naziva primarna grupa B.

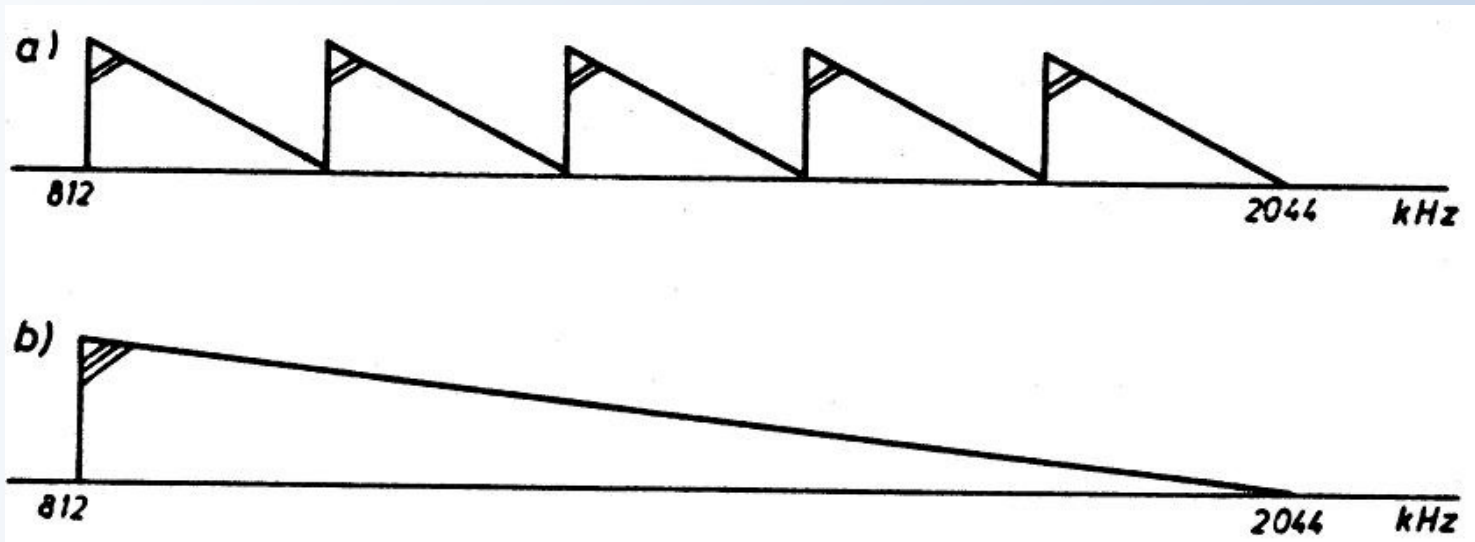
Pet primarnih grupa čine sekundarnu sa  $5 \cdot 12 = 60$  kanala u opsegu (12-252)kHz

Pet sekundarnih grupa čine tercijarnu  $5 \cdot 60 = 300$  kanala u opsegu (812-2044)kHz

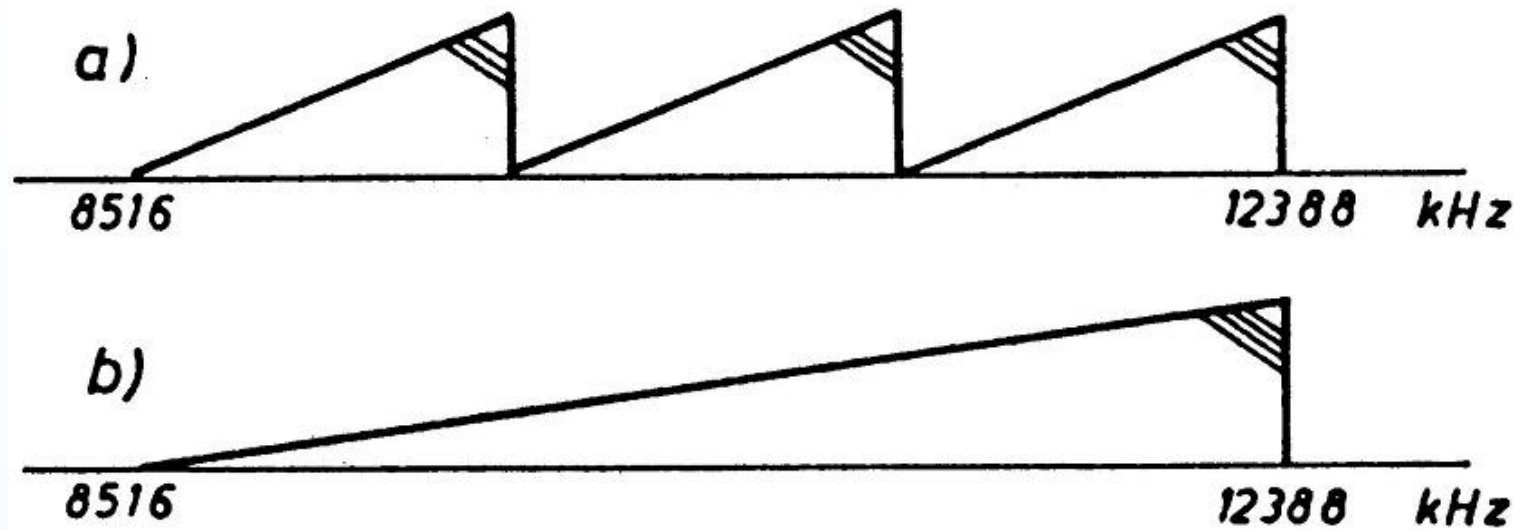
Tri ovakve tercijarne grupe čine kvaternarnu  $3 \cdot 300 = 900$  kanala u opsegu (8156-12388)kHz



*Slika: Osnovna sekundarna grupa od 60 kanala*



*Slika: Pet sekundarnih grupa a) obrazuju terciarnu b) od 300 kanala*



*Slika: Tri tercijarne grupe a) obrazuju kvaternarnu grupu b) koja ima 900 kanala*

# UGAONA MODULACIJA

- Ugaona modulacija spada u nelinearne postupke modulacije
- Dobijeni modulirani signal je kontinualan.
- Kao i u slučaju amplitudske modulacije, nosilac ima sinusoidalni talasni oblik.
- Osnovni parametri nosioca su amplituda i ugao
- U postupku *amplitudske* modulacije *amplituda* nosioca je modifikovana u zavisnosti od modulišućeg signala, a ugao ostaje nepromijenjen.
- U postupku ugaone modulacije amplituda nosioca ostaje nepromijenjena, a njegov ugao se modifikuje modulišućim signalom i postaje karakterističan parametar u kome je sadržana prenošena poruka.

Nosilac:

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

AM                      FM                      PM



Ako fazu učinimo direktno zavisnom od modulišućeg signala:

$$\varphi = \varphi(t) = \gamma [u_m(t)]$$

Opšti izraz za ugaono modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos \{\omega_0 t + \gamma [u_m(t)]\}$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \gamma [u_m(t)] = \Phi_0 + \gamma [u_m(t)] = \Phi_i$$

naziva se *trenutna faza*.

Veličina:

$$\varphi(t) = \gamma [u_m(t)] = \delta \Phi_i$$

koja predstavlja odstupanje trenutne faze  $\Phi_i$  od vrijednosti  $\Phi_0 = \omega_0 t$  zove se *trenutna devijacija faze*.

Izvod trenutne faze  $\Phi_i = \Phi(t)$  po vremenu:

$$\omega_i = \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

naziva se *trenutna kružna učestanost* ugaono modulisanog signala.

Odstupanje trenutne kružne učestanosti  $\omega_i$  od kružne učestanosti nosioca  $\omega_0$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_i - \omega_0 = \delta\omega_i$$

*trenutna devijacija kružne učestanosti* ugaono modulisanog signala.

***Trenutna učestanost*** ugaono modulisanog signala je:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \omega_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Odstupanje trenutne učestanosti  $f_i$  od učestanosti nosioca  $f_0$ :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_i - f_0 = \delta f_i$$

zvaćemo ***trenutnom devijacijom učestanosti***.

Preko navedenih veličina možemo da definišemo da li je riječ o faznoj ili frekvencijskoj modulaciji.

1. Ako je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***faznoj modulaciji*** ( $\Phi$ M, PM).
2. Ako je trenutna devijacija učestanost proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***frekvencijskoj modulaciji*** (FM).

# FAZNA I FREKVENCIJSKA MODULACIJA

1. Fazno modulirani signal je onaj čija je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta \Phi_i = \varphi(t) = k_\varphi u_m(t), \quad k_\varphi = \text{const.}$$

Modulišući signal  $u_m(t)$  je:

$$u_m(t) = U_m m(t)$$

$$U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

Vremensku promjenu modulišućeg signala  $u_m(t)$  karakteriše normalizovana funkcija  $m(t)$  koja zadovoljava uslov da je  $|m(t)| < 1$ ,  $|m(t)|_{\max} = 1$ . Stoga je:

$$|\delta \Phi_i|_{\max} = |\varphi(t)|_{\max} = k_\varphi |u_m(t)|_{\max} = k_\varphi |U_m m(t)|_{\max} = k_\varphi U_m = \Delta \Phi_0$$

Veličina  $\Delta \Phi_0$  naziva se *maksimalna devijacija faze* ili *devijacija faze*.

$$\Phi_i = \Phi(t) = \omega_0 t + k_\varphi u_m(t) = \omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)$$

Konačno, izraz za fazno modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos [\omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)]$$

2. Frekvencijski modulisan signal je onaj čija je trenutna devijacija učestanosti proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f u_m(t); \quad k_f = \text{const.}$$

*Maksimalna devijacija učestanosti*, ili često samo *devijacija učestanosti* biće:

$$|\delta f_i|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_f |u_m(t)|_{\max} = k_f |U_m m(t)|_{\max} = k_f U_m = \Delta f_0$$

Ako je riječ o kružnoj učestanosti, trenutna devijacija kružne učestanosti je:

$$\delta\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_\omega u_m(t); \quad k_\omega = 2\pi k_f = \text{const.}$$

Veličina

$$|\delta\omega_i|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_\omega |u_m(t)|_{\max} = k_\omega |U_m m(t)|_{\max} = k_\omega U_m = \Delta\omega_0$$

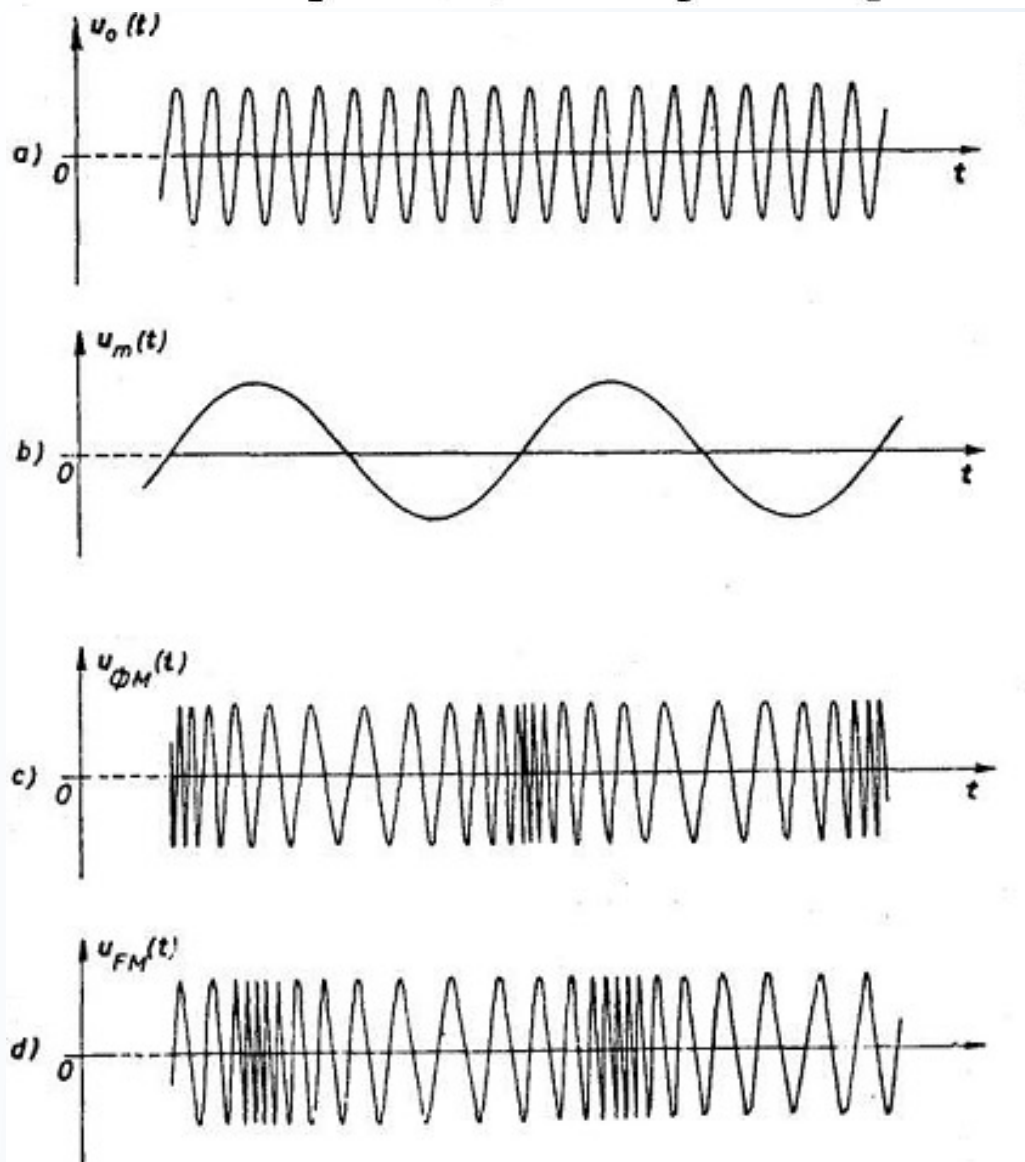
naziva se *maksimalna devijacija kružne učestanosti* ili *devijacija kružne učestanosti*.

Trenutna kružna učestanost je:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + k_\omega u_m(t) = \omega_0 + k_\omega U_m m(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 m(t)$$

Sada je izraz za frekvencijski modulisani signal:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k_\omega \int u_m(t) dt \right] = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t) dt \right]$$



Slika: a) Nosilac; b) modulišuci signal; c) fazno modulisan signal; d) frekvencijski modulisan signal

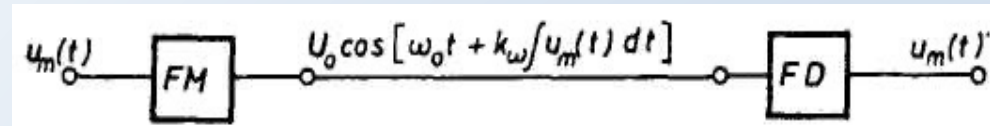
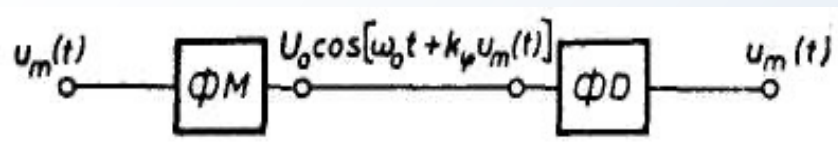


# OPŠTA VEZA IZMEĐU FAZNE I FREKVENCIJSKE MODULACIJE

Na slici su prikazane blok-šeme sistema za prenos signala faznom i frekvencijskom modulacijom.

$\Phi M$  - fazni modulator;  $\Phi D$  - fazni demodulator

$FM$  - frekvencijski modulator;  $FD$  - frekvencijski demodulator



*Slika: Blok-šema za prenos signala faznom modulacijom*

*Slika: Blok-šema za prenos signala frekvencijskom modulacijom*

Na izlazu iz faznog modulatora trenutna devijacija faze nosioca direktno je srazmjerna modulišućem signalu, a na izlazu frekvencijskog modulatora trenutna devijacija faze nosioca proporcionalna je integralu modulišućeg signala.

Što se tiče demodulatora, fazni demodulator na svom izlazu mora dati signal direktno srazmjeran trenutnoj devijaciji faze nosioca na njegovom ulazu, dok frekvencijski demodulator daje signal direktno proporcionalan izvodu trenutne devijacije faze nosioca na svom ulazu.

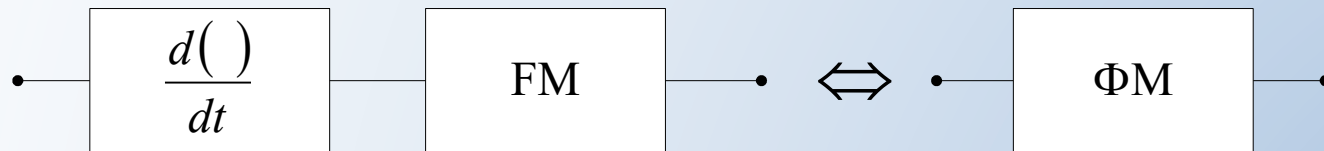
Imajući u vidu odnose između trenutne devijacije faze nosioca i prenošenog signala u modulatoru i demodulatoru, koji karakterišu opštu vezu između fazne i frekvencijske modulacije, moguće je upotrebom posebnih sklopova od faznog modulatora/ demodulatora napraviti frekvencijski i obrnuto.

1.  $\Phi M = \text{diferencijator} + F M$
2.  $\Phi D = F D + \text{integrator}$
3.  $F M = \text{integrator} + \Phi M$
4.  $F D = \Phi D + \text{diferencijator}$

1. Ako na ulaz FM modulatora dovedemo signal  $du_m(t)/dt$  izlaz iz modulatora će biti:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\omega u_m(t)) = u_{\Phi M}(t)$$

tj.  $\Phi M$  modulator će biti kaskadna veza diferencijatora i FM modulatora.



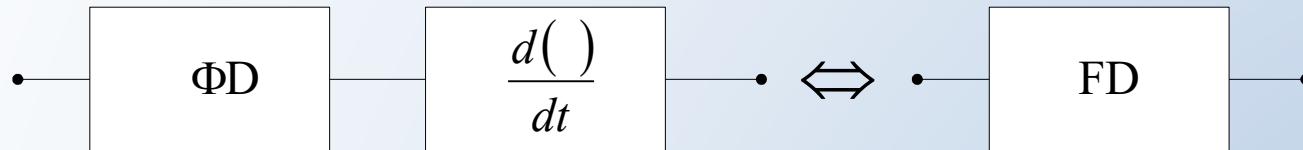
2. Demodulacija je inverzan proces:



3. Ako signal prije ulaska u  $\Phi M$  modulator prođe kroz kolo za integriranje, na izlazu sistema dobiće se modulisan signal čija je trenutna devijacija faze direktno srazmjerna integralu modulišućeg signala, a to je u stvari frekvencijski modulisani signal.



4. Demodulacija je inverzan proces:





## SPEKTAR UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Proces amplitudske modulacije se sastoji u translaciji spektra modulišućeg signala, odnosno, svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala čija je učestanost  $f_m$ , u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac:  $f_0 + f_m$  i  $f_0 - f_m$ . Proces amplitudske modulacije je **linearan** jer važi zakon superpozicije komponenata. Bitna osobina spektra AM signala je da nema generisanja novih komponenata čije su učestanosti različite od onih koje su nastale opisanom translacijom.

Kod ugaone modulacije to nije slučaj.

- Komponente iz spektra ovako modulisanog signala vrlo su složeno vezane za komponente modulišućeg signala.
- Spektar UM signala je, čak i u najjednostavnijem slučaju (modulišućí signal je jedna sinusoidalna funkcija), **neograničen**, tj. u procesu ugaone modulacije jedna komponenta generiše beskonačno mnogo komponenti različitih učestanosti.
- Proces ugaone modulacije je u suštini **nelinearan** i zato zakon superpozicije ne važi.

Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sinusoidalnog test tona:

Pretpostavimo da je modulišući signal dat jednostavnim analitičkim izrazom:

$$u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

Izraz za fazno i frekvencijski modulisan signal ovakvim modulisućim signalom

je:  $u_{\Phi M}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\varphi U_m \cos \omega_m t)$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

Odnosno, dovoljno je razmatrati sledeći slučaj:

$$u_{UM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t)$$

Veličina  $m$  predstavlja maksimalnu devijaciju faze ugaono modulisanog signala, naziva se **indeks ugaone modulacije**, i za slučaj fazno modulisanog signala iznosi:

$$m = k_\varphi U_m$$

a za slučaj frekvencijski modulisanog signala on je:

$$m = \frac{k_\omega U_m}{\omega_m}$$

Izraz za UM signal može da se predstavi u vidu sume prostoperiodičnih komponenata, a za to se koriste određeni identiteti iz teorije Bessel-ovih funkcija. Važi da je:

$$\sin(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin(\alpha + n\beta)$$

$$\cos(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\alpha + n\beta)$$

$$\sin(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$J_n(m)$  je Bessel/ova funkcija prve vrste  $n$ -tog reda za argument  $m$ .

Sada je UM signal:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}\right]$$

Ovaj izraz može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \left\{ J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Kako za Besselove funkcije važi:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$$

$$\cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t - n \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^n \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right]$$

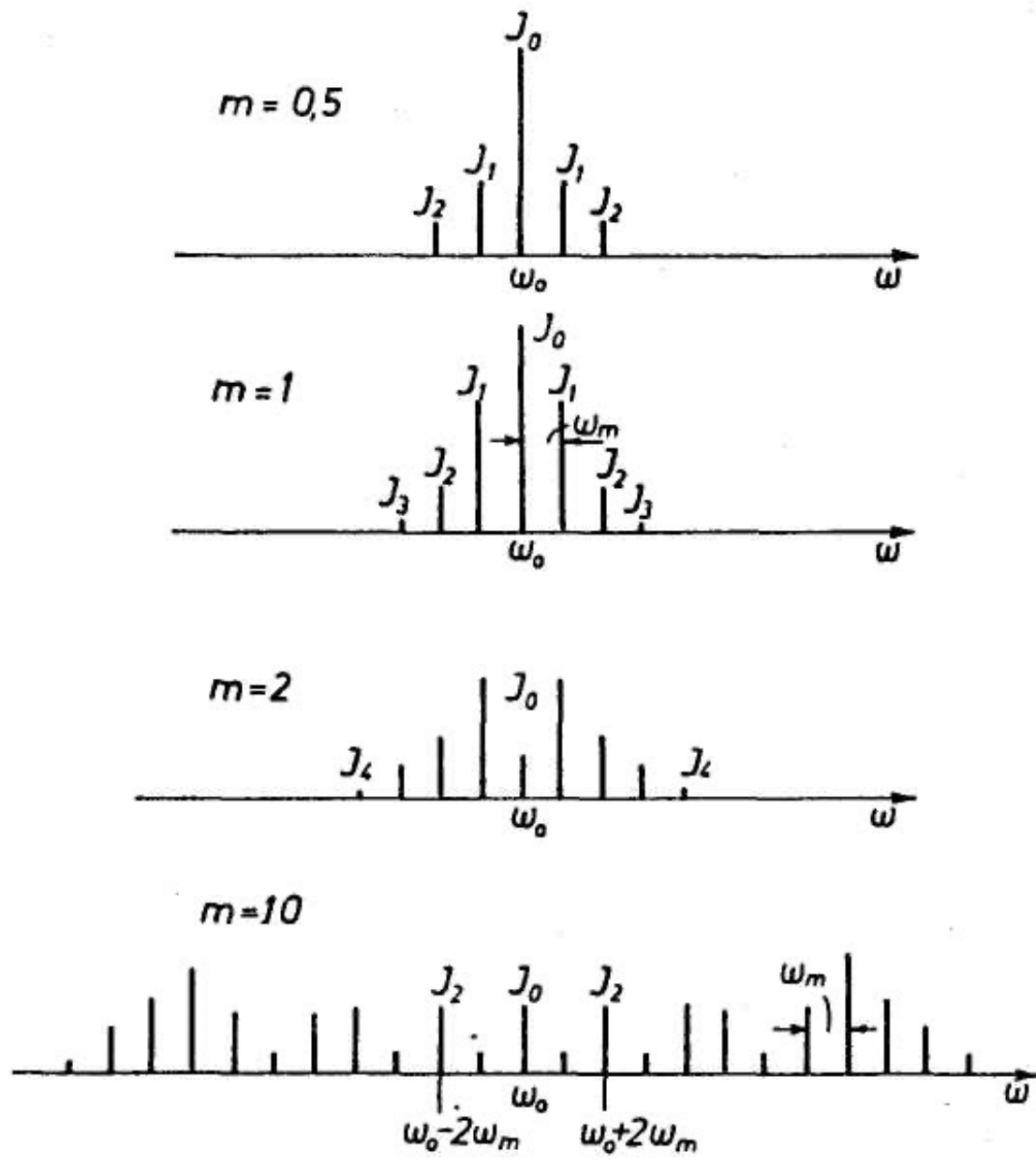
To izraz za UM signal postaje:

$$u(t) = U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \left\{ \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + \frac{n \pi}{2} \right] + \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Za dati indeks modulacije  $m$  i za izabranu vrijednost  $n=1, 2, 3, \dots$ , Bessel-ova funkcija  $J_n(m)$  predstavlja konstantu. U izrazu koji predstavlja ugaono modulisan signal razlikujemo tri dijela:

1. Nosilac čija je amplituda  $U_0 J_0(m)$  a učestanost  $\omega_0$
2. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n \omega_m) t$
3. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n \omega_m) t$

Vidimo da je spektar **neograničen** i **diskretan** a komponente se nalaze lijevo i desno od nosioca, pri čemu je razmak između dvije susjedne komponente u spektru  $\omega_m$ .



*Slika: Amplitudski spektri ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom za razne vrijednosti indeksa modulacije  $m$ .*

*Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sume dva sinusoidalna test tona*

Kada je modulišući signal suma dva sinusoidalna test tona, UM signal je oblika:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \cos \omega_1 t + m_2 \cos \omega_2 t)$$

$m_1$  i  $m_2$  su indeksi modulacije komponenti čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .  
Gornji izraz za UM signal može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) + \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) \right]$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} u(t) = & U_0 \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) - \\ & - U_0 \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) \end{aligned}$$



Koristeći izraze za Bessel-ove funkcije, dobija se:

$$u(t) = U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right] - \\ - U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \left[ \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ \left. - \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

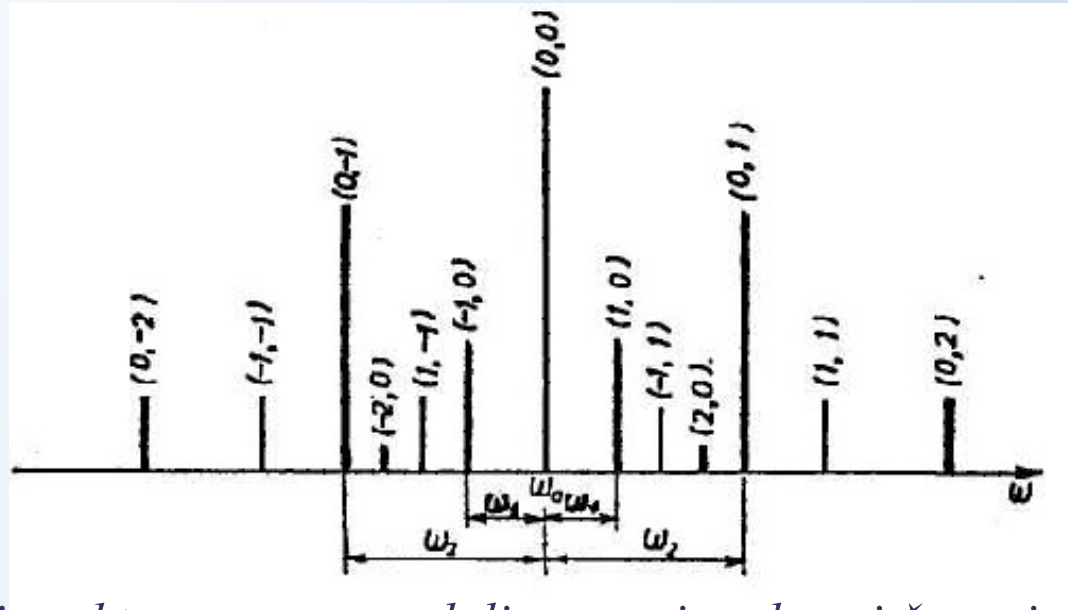
Izraz u uglastoj zagradi predstavlja razvijeni oblik kosinusa sume dva ugla, pa je:

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \cos \left[ (\omega_0 + p \omega_1 + q \omega_2) t + (p + q) \frac{\pi}{2} \right]$$

Spektar ovakvog ugaono modulisanog signala je diskretan.

Sve njegove komponente možemo podijeliti u četiri kategorije:

1.  $p=q=0$ , nosilac
2.  $p=0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_1 \cos \omega_1 t$
3.  $p \neq 0, q=0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + q\omega_2$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_2 \cos \omega_2 t$
4.  $p \neq 0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1 + q\omega_2$  koje predstavljaju komponente nastale uslijed međusobnog uticaja dvije sinusoida.



Slika: Amplitudski spektar ugaono modulisanog signala pri čemu je modulišući signal sastavljen od sume dva sinusoidalna test tona čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a odgovarajući indeksi modulacije  $m_1=0,5$  i  $m_2=1$



# ANALIZA SPEKTRA UGAONO MODULISANIH SIGNALA

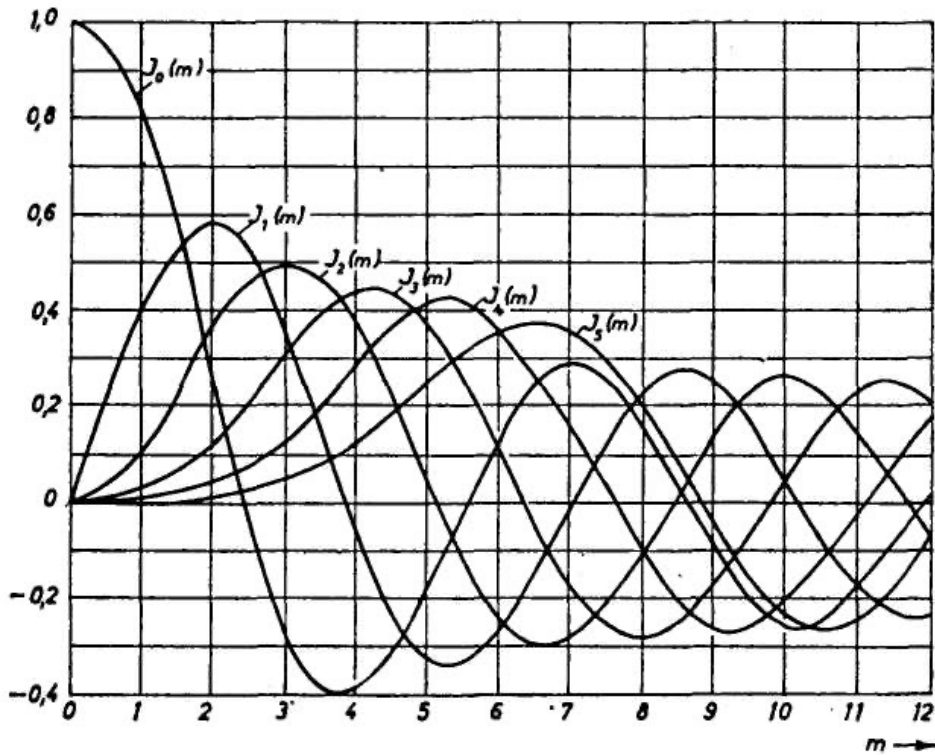
Amplitude pojedinih spektralnih komponenata ugaono modulisanog signala zavise od Bessel-ovih funkcija  $J_n(m)$ .

Da bi se odredila struktura amplitudskog spektra UM signala potrebno je analizirati kako zavisi  $J_n(m)$  od indeksa modulacije  $m$  i reda funkcije  $n$  koji određuje red bočnih komponenata.

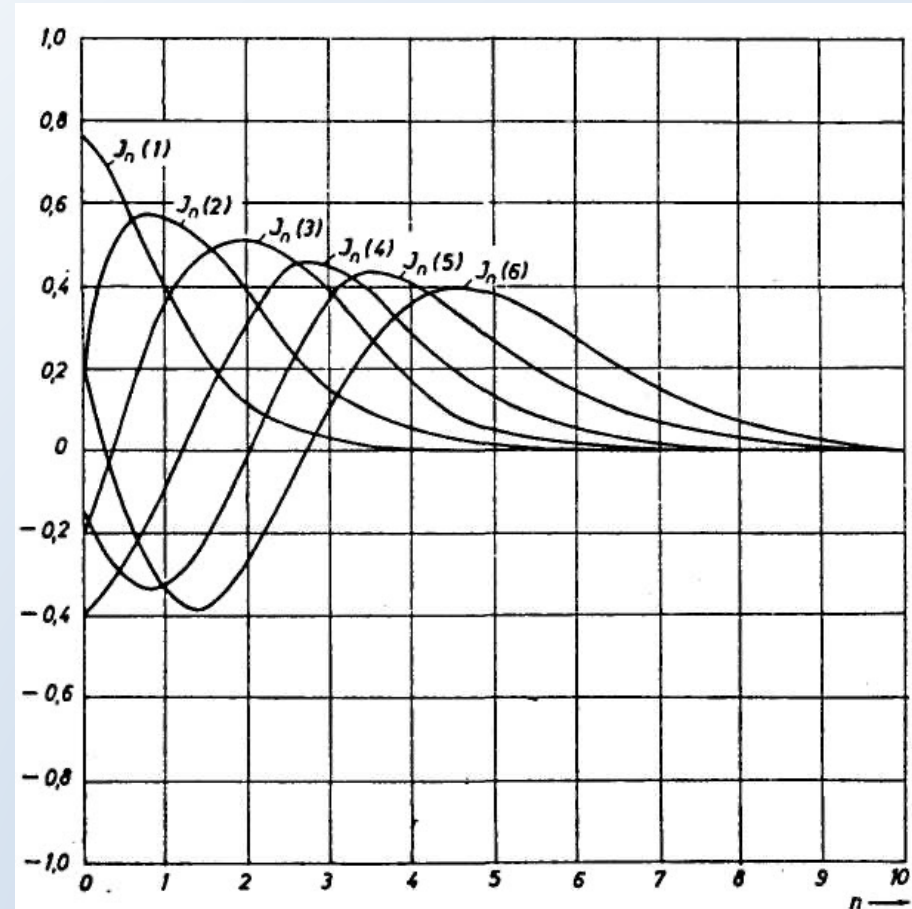
Za neke vrijednosti  $m$  i  $n$ , Bessel-ove funkcije imaju relativno vrlo malu vrijednost, pa će se one u određenim uslovima moći i zanemariti.

Zanemarivanjem pojedinih komponenti sistem za prenos se može dimenzionisati tako da ima ograničen propusni opseg, a da degradacija kvaliteta prenosa bude u dozvoljenim granicama.

# NEKE KARAKTERISTIČNE OSOBINE BESSEL-OVIH FUNKCIJA



Slika: Bessel-ove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $n = \text{const}$ ,  $m = \text{var}$ .



Slika: Bessel-ove funkcije  $J_n(m)$ ;  
 $m = \text{const}$ ,  $n = \text{var}$ .

1. U slučaju da je indeks modulacije  $m=0$ , tada je  $J_0(0)=1$ , a  $J_n(0)=0$ , za  $n>1$ . Tada nema modulacije, već postoji samo nosilac.
2. Što je red funkcije  $n$  veći, to je prvi maksimum više udaljen od koordinatnog početka, a taj prvi maksimum je najveća apsolutna vrijednost funkcije za dati red.
3. Sa porastom indeksa modulacije  $m$  funkcija datog reda  $n$  mijenja se oscilatorno, uzimajući sve manje i manje apsolutne vrijednosti.
4. Kako red funkcije  $n$  u slučaju modulacije sinusoidalnim test tonom označava red bočne komponente, to kriva sa slike za usvojeni indeks modulacije  $m$  pokazuje relativne amplitude bočnih komponentata za cijele vrijednosti  $n$ .
5. Za male vrijednosti indeksa modulacije  $m$  Bessel-ove funkcije se mogu aproksimirati polinomom oblika

$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$

6. Za velike vrijednosti argumenta  $m$  približno je:

$$J_n(m) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos\left(m - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

7.  $J_n(m)$  počinje brzo da opada sa porastom  $n$  kada je ispunjen uslov  $n>m$ .
8. Opšta osobina Bessel-ovih funkcija je da je  $J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$

# ŠIRINA OPSEGA UČESTANOSTI POTREBNA ZA PRENOS UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Spektar UM signala sadrži neograničeno mnogo komponenata. Njihove amplitude su direktno srazmjerne ili Besselovoj funkciji  $J_n(m)$  (u slučaju kada je modulišući signal sinusoidalni ton), ili proizvodu Besselovih funkcija različitih redova i argumenata (u slučaju kada je modulišući signal suma sinusoidalnih tonova).

Sa porastom reda  $n$ , vrijednosti funkcije  $J_n(m)$  za  $n > m$  počinju naglo da opadaju, tj. javlja se čitav niz komponenata zanemarljivo malih amplituda koje se ne prenose. Zadatak je odrediti koje komponente možemo odbaciti a da ne dođe do značajnije degradacije kvaliteta prenošenog signala.

## ***Kriterijum o značajnim bočnim komponentama***

Značajnim bočnim komponentama se smatraju sve one spektralne komponente koje nose više od  $p\%$  snage nemodulisanog nosioca. Najčešće se uzima da je ovaj procenat  $p=1\%$ .

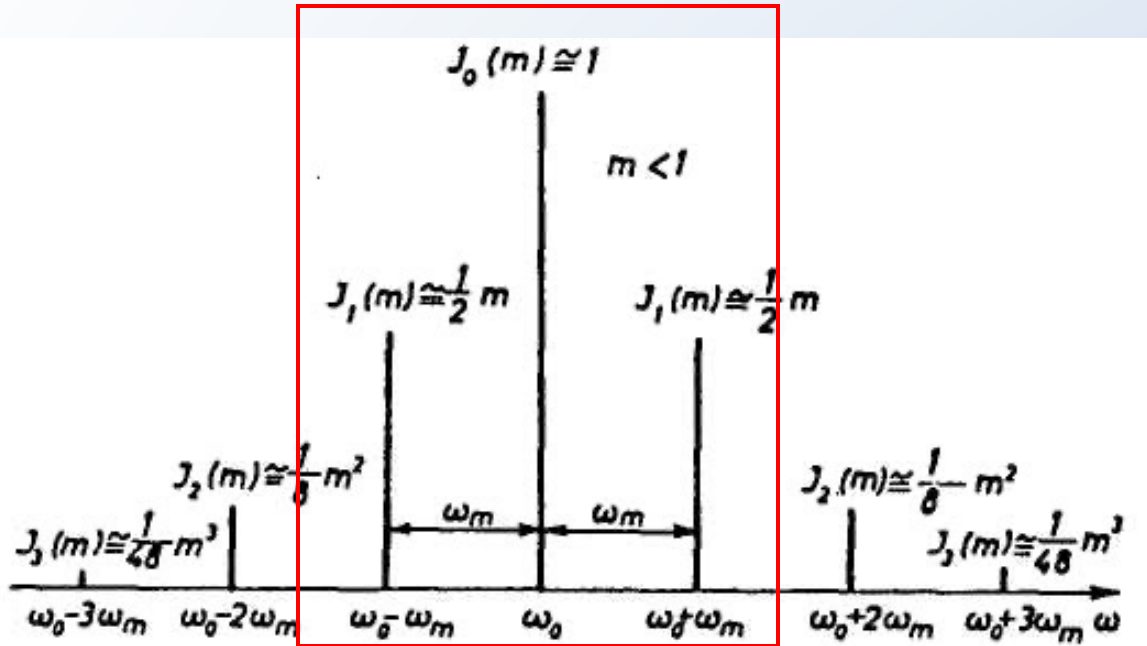
Može se smatrati da je za prenos UM signala potreban onaj opseg učestanosti izvan koga bilo koja od spektralnih komponenata ima snagu manju od  $1\%$  snage nosioca.

# Širina spektra UM signala modulisanog sinusoidalnim test tonom

Neka je indeks modulacije mali,  $m < 1$ . Tada je:

$$J_0(m) \cong 1, J_1(m) \cong \frac{1}{2}m, J_2(m) \cong \frac{1}{8}m^2, J_3(m) \cong \frac{1}{48}m^3, \dots$$

$$J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$$



Slika: Dio amplitudskog spektra ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom sa indeksom modulacije  $m < 1$

Na osnovu definicije značajnih komponenata UM signala, može da se pronađe vrijednost indeksa modulacije  $m$  pri kojoj je dovoljno prenositi samo bočne komponente prvog reda.



Nemodulisani nosilac ima relativnu amplitudu  $J_0(m)=1$ . Relativna snaga ove komponente je  $J_0^2(m)=1$ .

Relativna snaga jedne bočne komponente prvog reda treba da zadovolji uslov:

$$J_1^2(m) = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 = 0,01$$

odakle je  $m \leq 0.2$ .

U svim slučajevima UM signala u kojima je indeks modulacije  $m \leq 0.2$ , dovoljno je prenositi nosilac i prve bočne komponente. Izraz za takav UM signal moći će se približno napisati u sledećem obliku:

$$u(t) \cong U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + U_0 J_1(m) \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

Kako je:

$$J_0(m) \cong 1 \text{ i } J_1(m) \cong \frac{1}{2} m,$$

To je:

$$u(t) \cong U_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 - \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{1}{2} m U_0 \cos \left[ (\omega_0 + \omega_m) t + \frac{\pi}{2} \right]$$

Ovaj izraz brojem komponenata i njihovim amplitudama podsjeća na amplitudski modulisan signal KAM tipa. Ali, fazni odnosi se znatno razlikuju.

Izraz za sinusoidalno modulisan signal KAM tipa je:

$$u_{\text{KAM}}(t) = U_0' \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos (\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos (\omega_0 + \omega_m)t$$

Razlika između UM i KAM signala može se najbolje uočiti iz njihove fazorske predstave.

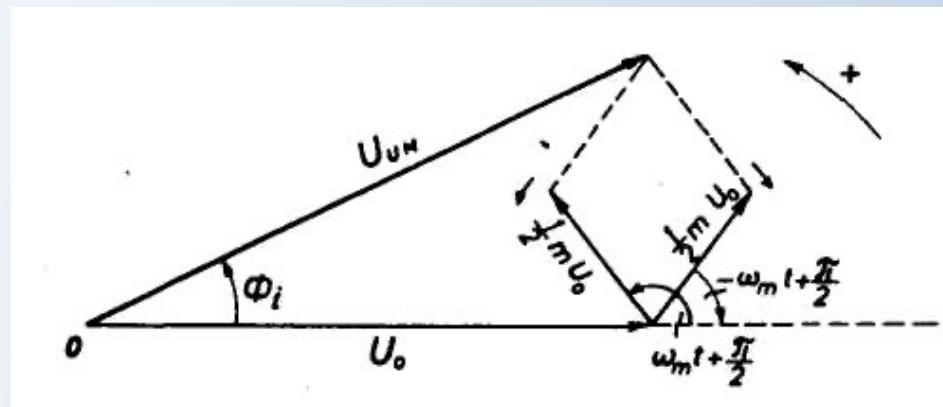
UM signal može da se napiše u obliku:

$$u(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ U_0 + \frac{1}{2} m U_0 e^{-j(\omega_m t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} m U_0 e^{j(\omega_m t + \frac{\pi}{2})} \right] e^{j\omega_0 t} \right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi može da se smatra kao rezultanta tri fazora:

$$U_{\text{UM}} = U_0 + \frac{1}{2} m U_0 e^{-j(\omega_m t - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} m U_0 e^{j(\omega_m t + \frac{\pi}{2})}$$

Fazorski dijagram je:



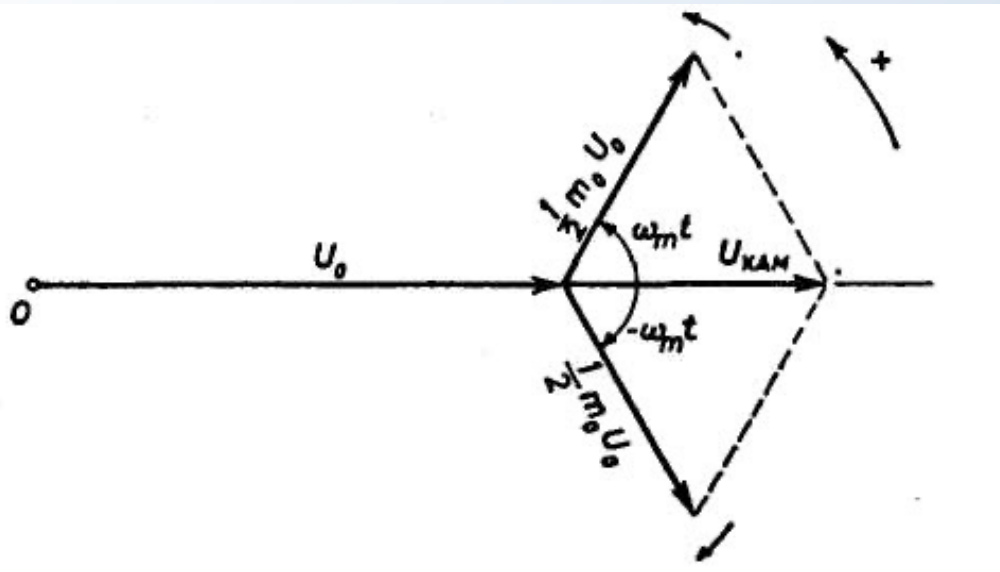
*Slika: Fazorska predstava ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom pri čemu je indeks modulacije  $m < 0,2$*

Na sličan način izraz za KAM signal može da se napiše u obliku:

$$u_{\text{KAM}}(t) = \text{Re} \left\{ \left[ U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t} \right] e^{j\omega_0 t} \right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi je jedan fazor  $U_{\text{KAM}}$  koji predstavlja rezultantu tri fazora:

$$U_{\text{KAM}} = U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t}$$



*Slika: Fazorska predstava amplitudski modulisanog signala tipa KAM sinusoidalnim test tonom.*



U slučaju KAM signala rezultatni fazor je uvijek na realnoj osi, i zavisno od stepena modulacije i vrijednosti  $U_0$  mijenja se samo njegov intenzitet. To nije slučaj sa ugaonom modulacijom. Kod nje rezultatni fazor treba da se pomjera oko svog centralnog položaja, ugao  $\Phi_i$  se mijenja onako kako diktira modulišući signal. Vrh fazora  $U_{UM}$  treba uvijek da opisuje dio kruga sa centrom u tački O, pošto je amplituda UM signala konstantna. Međutim, to nije slučaj. Razlog je što smo zanemarili neke bočne komponente, pa je došlo do parazitne amplitudske modulacije.

✓ Zaključak:

U opštem slučaju eliminisanje izvjesnih bočnih komponentata dovodi do parazitne amplitudske modulacije.

U slučaju kada indeks modulacije nije mali, spektar ugaono modulisanog signala sadrži više od dvije značajne bočne komponente. Kako je:

$$J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$$

to će za ovako ugaono modulisane signale biti dovoljno da se sa svake strane nosioca prenese po  $n=m+1$  bočnih komponenata. Potrebna širina opsega za prenos UM signala biće definisana Carson-ovim obrascem:

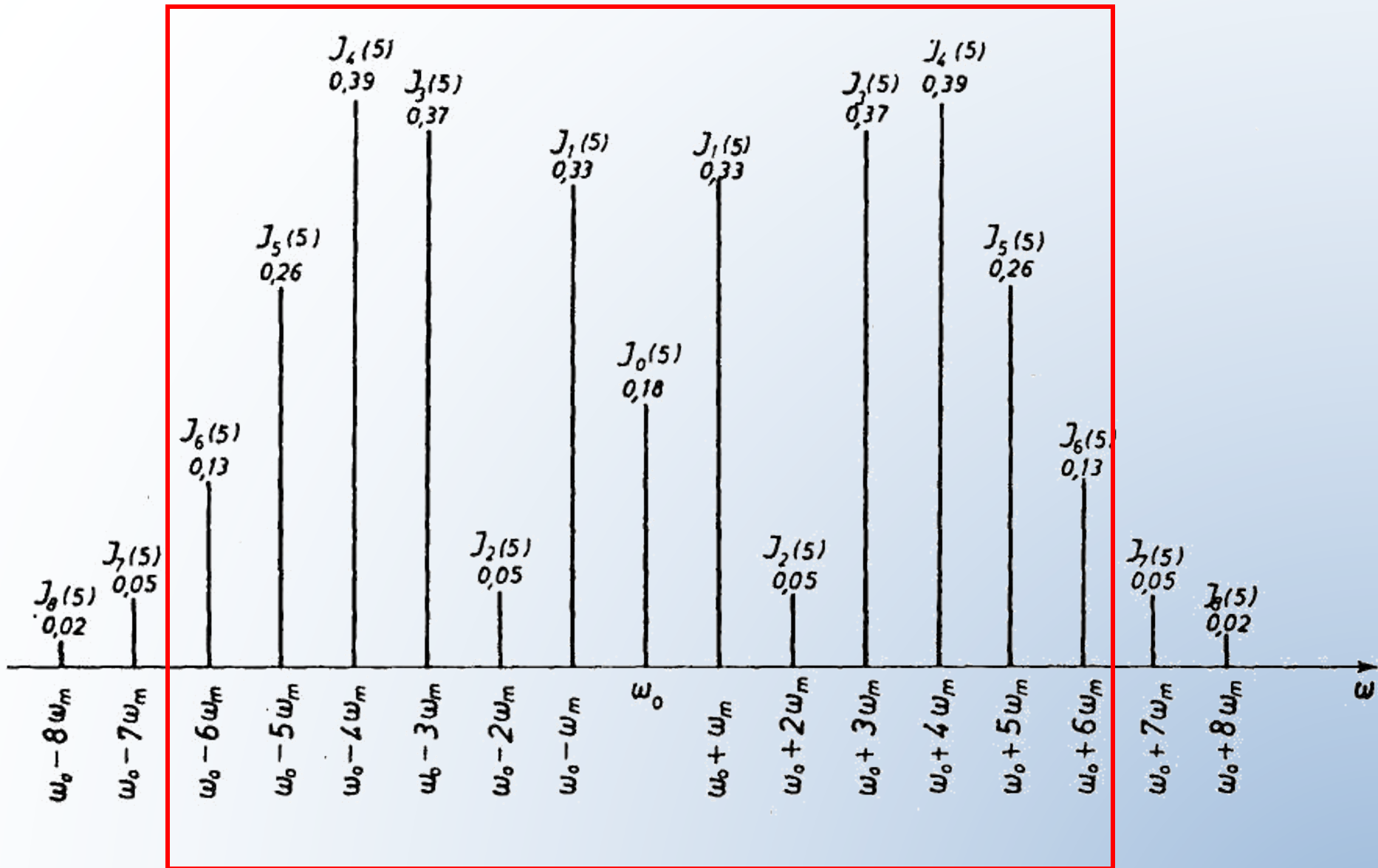
$$B = 2f_m(m+1)$$

Carson-ov obrazac se za male vrijednosti indeksa modulacije  $m \ll 1$  postaje:

$$B \cong 2f_m$$

Za velike vrijednosti  $m \gg 1$  postaje:

$$B \cong 2mf_m$$



Slika: Dio amplitudskog spektra UM signala sinusoidalnim test tonom za  $m=5$